

פתרון למבחן מ 01.09.25

שאלה 1 סעיף א'

$$P(Y_1 = Y_2 = 0) + P(Y_1 = Y_2 = 1) + P(Y_1 = Y_2 = 2) = \\ = \left(\frac{4}{6}\right)^5 + \binom{5}{1} \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \binom{5}{2} \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6}$$

הערות

שימו לב שצריך לבחור גם את מיקום התוצאות של אחת וגם את מיקום התוצאות שתיים.
שמו לב שמספר הפעמים שמספר אחד מופיע, תלוי במספר הפעמים שמספר אחר מופיע.
לכן לצירוף מסוים של הופעות של אחד ושתיים אין הסתברות ששווה למכפלת ההסתברויות.

סעיף ב'

אם Z הוא מספר ההופעות הכולל של 1,2,3, אז מבוקש $Cov(Z, 5 - Z)$

$$Cov(Z, 5 - Z) = Cov(Z, -Z) = -Cov(Z, Z) = -V(Z) = -5 \cdot \frac{3}{6} \left(1 - \frac{3}{6}\right) = -1.25$$

(Z מתפלג $Bin\left(5, \frac{3}{6}\right)$.)

הערות

הקשר בין הסכומים הוא שלילי, לכן צפוי שהשונויות המשותפת תהיה שלילית.
המאורעות שמספר אחד מופיע יותר מפעם אחת, ומספר אחר מופיע יותר מפעם אחת, אינם זרים.

סעיף ג'

המשתנה המקרי Y_8 תמיד שווה לאפס. קבוע תמיד בלתי מתואם עם כל משתנה. לכן התשובה היא אפס.

סעיף ד'

$$E(Y_1 Y_2 | Y_1 = 2) = E(2 Y_2 | Y_1 = 2) = 2 E(Y_2 | Y_1 = 2) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} = 1.2$$

אם $Y_1 = 2$ אז יש שלוש הטלות שבהן יכולה להתקבל התוצאה שתיים. בכל אחת מהן מתקבלת בסיכוי שווה כל אחת מהתוצאות שבין שתיים לשש.

סעיף ה'

תוצאה מסוימת מתקבלת לפחות פעם אחת בסיכוי $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$ (המשלים של הופעת תוצאה שונה ממנה בכל אחת מההטלות). לכן תוחלת האינדיקטור של הופעת תוצאה היא $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$. תוחלת סכום ששת האינדיקטורים היא $6 \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5\right]$. ששווה בערך ל 3.588.

הערות

מתקבלות בין אחד לחמש תוצאות שונות. לכן התוחלת חייבת להיות בתחום שבין אחד לחמש.

שאלה 2

סעיף א'

זו התוחלת של משתנה $NB\left(2, \frac{1}{2}\right)$. היא שווה ל $\frac{2}{1/0.5} = 4$.

סעיף ב'

יש הצלחה ראשונה בניסוי הראשון בסיכוי 0.5.
יש הצלחה ראשונה בניסוי השני בסיכוי $0.25 = (1 - 0.5)0.5$.
יש הצלחה ראשונה בניסוי השלישי בסיכוי $0.125 = (1 - 0.5)(1 - 0.5)0.5$.
התוחלת היא $1.75 = 0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.125 \cdot 3$.

הערה

כאן התוחלת חייבת להיות קטנה מתוחלת של משתנה גיאומטרי בעל פרמטר חצי (בנסיון השלישי בכל מקרה עוצרים).

סעיף ג'

יש הצלחה ראשונה בניסוי הראשון בסיכוי 0.5.
יש הצלחה ראשונה בניסוי השני בסיכוי 0.25.
אחרת מתחילים סדרת נסיונות ב"ת החל מהניסוי הרביעי, זאת אומרת שבמקרה זה יש משתנה גאומטרי שמוזז בשלוש.
התוחלת היא $2.25 = 0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.25 \left(3 + \frac{1}{0.5}\right)$.

הערה

כאן התוחלת חייבת להיות גדולה מהתוחלת של משתנה גיאומטרי בעל פרמטר חצי. (הנסיון השלישי הוא כאן מבוזבז).

שאלה 3

תחילה נמצא את ערכו של c . צריך להתקיים $\int_2^3 cxdx = 0.5cx^2 \Big|_2^3 = 1$.
לכן $c = 0.4$.

$$E(X) = \int_2^3 0.4x \cdot xdx = \frac{0.4}{3} x^3 \Big|_2^3 = \frac{19 \cdot 0.4}{3}$$

הערות

צריך למצוא את הקבוע C כדי להגיע לתשובה מספרית. כך עשינו בשאלות דומות.
מכיון שהמשתנה מקבל ערכים בין שתיים לשלוש, אז התוחלת שלו חייבת להיות בין שתיים לשלוש. מכיון שהצפיפות שלו היא מונוטונית עולה בקטע זה, אז התוחלת שלו חייבת להיות גדול מ 2.5 שהוא אמצע הקטע.

שאלה 4

השאלה היא מהי בקירוב ההסתברות שממוצע של אלף אינדיקטורים ב"ת בעלי הסתברות 0.6 יהיה קטן מחצי. התוחלת של האינדיקטורים האלה היא 0.6 והשונות שלהם היא $0.6 \cdot 0.4 = 0.24$. לפי משפט הגבול המרכזי ההסתברות שווה בקירוב ל

$$\phi\left(\frac{0.5 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.24}{1000}}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.24}{1000}}}\right)$$

גודל זה שווה בקירוב לאפס.

הערות

צריך להגיד למה בקירוב שווה ההסתברות. ההסתברות המצטברת בנקודה גדולה משלוש היא קרובה מאוד לאחד.

שאלה 5

$$\frac{\binom{20}{3} + \binom{20}{2} \binom{10}{1}}{\binom{20+10}{3}}$$

שלומי