

© כל הזכויות שמורות
קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון למבחן מ 12.08.25

שאלה 1

סעיף א'

$$0,1(1 - 0.3)(1 - 0.5) + (1 - 0.1)0.3(1 - 0.5) + (1 - 0.1)(1 - 0.3)0.5 = 0.485$$

(אם המאורעות הם ב"ת אז הסתברות חיתוך שווה למכפלת ההסתברויות).

הערה

המאורע שיש בדיוק הצלחה אחת איננו המאורע שיש לפחות הצלחה אחת.

סעיף ב'

יהי X - מספר המאורעות שיתרחשו.

$$P(X = 0) = 1 - P(C) = 0.5$$

$$P(X = 1) = P(C) - P(B) = 0.2$$

$$P(X = 2) = P(B) - P(A) = 0.2$$

$$P(X = 3) = P(A) = 0.1$$

אם C לא מתרחש, אז אף אחד מהמאורעות לא מתרחש. אם A מתרחש אז כל המאורעות מתרחשים. כדי שיתרחש מאורע יחיד, חייב C להתרחש, ואסור ש B יתרחש (אם B לא מתרחש, אז בודאי ש A לא מתרחש).

הערות

כאן המאורעות אינם ב"ת. למשל אם A מתרחש, אז גם האחרים בהכרח מתרחשים. כדי שמאורע יכיל מאורע אחר, חייבת להיות לו הסתברות שהיא לא קטנה מהסתברות האחר. מאורע בעל הסתברות קטנה לא יכול להכיל מאורע בעל הסתברות גבוהה.

סעיף ג'

המאורעות הם זרים, לכן לא יתכן שיתרחשו יותר ממאורע אחד. מכיון שהמאורעות הם זרים, אז הסתברות האיחוד שלהם שווה לסכום ההסתברויות שלהם. לכן ההסתברות שיתרחש מאורע אחד היא $0.1 + 0.3 + 0.5 = 0.9$. אחרת, לא יתרחש אף מאורע. שונות מספר המאורעות שיתרחשו היא $0.9 \cdot 0.1 = 0.09$ (שונות של אינדיקטור).

הערות

כאן המאורעות אינם ב"ת. אם אחד מתרחש, אז האחרים לא יכולים להתרחש. שונות היא לפי הגדרתה, ממוצע ריבועי הסטיות מהתוחלת. לכן היא לא יכולה להיות שלילית. מכיון שהמאורעות הם זרים, אז לא יכול להתרחש יותר מאירוע אחד.

סעיף ד'

קיימת הסתברות חיובית שיתרחש לפחות אירוע אחד. אבל, בגלל שהסתברות איחוד לא גדולה מסכום ההסתברויות ומכיון שסכום ההסתברויות של המאורעות קטן מאחד, אין ודאות שיתרחש לפחות אירוע אחד. לכן מספר המאורעות שמתרחשים אינו משתנה מנוון, ואין לו שונות של אפס. משתנה מקרי שאינו מנוון חייב לסטות מתוחלתו בסיכוי חיובי, כי לא תמיד הוא מקבל אותו ערך. לכן השונות שלו (ממוצע ריבועי הסטייה מהתוחלת) חייבת להיות חיובית.

שימו לב שתוחלת מספר ההצלחות היא 0.9 . מספר ההצלחות שנקבל חייב להיות מספר שלם. לכן בכל מקרה יש סטייה מהתוחלת.

הערות

בסעיף זה לא ניתן להניח הנחות על הקשרים בין המאורעות. צריך להראות שבכל מקרה לא תיתכן שונות אפס. לא ניתן לעשות חישובים שמתייחסים לקשרים מסוימים בין המאורעות.

אם יש תלות, היא יכולה להיות תלות בצורות שונות.
צריך לשכנע שמספר המאורעות לא יכול להיות מנוון. לא מספיק להגיד שהוא לא יכול להיות מנוון.

שאלה 2

סעיף א'

תוצאות ההטלות הן תלויות. למשל, אם בהטלה אחת קיבלנו "פלי", אז אנו יודעים שנבחר המטבע ההוגן, ולכן גדל הסיכוי שבהטלות אחרות נקבל "פלי".

הערות

משתנה בינומי סופר את מספר ההצלחות בסדרת נסיונות ב"ת שווי הסתברות. כאן הנסינות הם שווי הסתברות, אבל הם אינם ב"ת. ההסתברות לקבלת "עץ" בכל הטלה היא ידועה. היא שווה ל $0.75 = 0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5$. לאחר קבלת תוצאה מסוימת בהטלה אחת, הסיכויים בהטלות אחרות משתנות. זאת אומרת שיש תלות. אם במטבע הנבחר היינו מבצעים רק הטלה בודדת, אז מספר תוצאות ה"עץ" היה אינדיקטור בעל הסתברות $0.75 = 0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5$. אינדיקטור הוא מקרה פרטי של התפלגות בינומית, ולכן מספר תוצאות ה"עץ" כן היה מתפלג בינומית. זה מדגיש את העובדה שרק התלות בין ההטלות מונעת כאן מסכום שלושת ההטלות מלהתפלג בינומית. נימוק שמתבסס על כך שהתוצאות תלויות בבחירת המטבע אינו מספק. הדוגמא של הטלה בודדת מראה זאת. חייבים לציין שההטלות תלויות, ולא רק שיש תלות בזהות המטבע. טיעון נוסף שלא מתקבל הוא שתתכן בחירה במטבע לא הוגן שבו ההתפלגות אינה בינומית.

סעיף ב'

$$1 - [0.5 \cdot 1^3 + 0.5 \cdot 0.5^3] = \frac{7}{16}$$

צירוף של שלושה עצים יכול להתקבל על-ידי כל אחד משני המטבעות. כל צירוף אחר יכול להתקבל רק על-ידי המטבע ההוגן.

סעיף ג'

$$\frac{0.5 \cdot 0.5^3}{0.5 \cdot 1^3 + 0.5 \cdot 0.5^3} = \frac{1}{9}$$

(חישוב הסתברות מותנה, כאשר במכנה מופיעה ההסתברות לשלושה עצים, ובמונה ההסתברות של הצירוף של בחירת המטבע השני וקבלת שלושה עצים בו).

שאלה 3

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1.5$$

תוחלת סכום שווה תמיד לסכום התוחלות. כאן רוב המאורעות לא יכולים להתרחש. התוחלת של אינדיקטור שווה להסתברות שלו לקבל את הערך אחד. התוחלת של משתנים מנוונים שמקבלים רק את הערך אפס היא אפס. למשל, המשתנה השני גדול משתיים, אם הוא מקבל את אחד מהערכים שלוש או ארבע. זה קורה בסיכוי שני רבעים. למשל, המשתנה הששי לא יכול בכלל לקבל ערך גדול משש.

הערה

אם אומרים על משתנה אחד שהוא בעל התפלגות מסוימת, ואומרים שלמשתנים אחרים יש את אותה התפלגות כמו למשתנה הראשון, אז גם להם יש את אותה התפלגות מסוימת.

שאלה 4

סעיף א'

זה אפשרי.

נניח שלמשתנה יש פונקציית צפיפות ששווה לשליש בקטעים שבין אפס לאחד ובין שתיים לארבע, ושווה לאפס בכל נקודה אחרת, אז ההסתברות המצטברת באחד וגם בשתיים שווה להסתברות שהתקבלה נקודה בין אפס לאחד.

הערות

מדובר באותו רעיון כמו בטענה שלא חייבת להיות יחידות של החציון של משתנה רציף. משתנה מקרי רציף מוגדר כמשתנה שפונקציית ההסתברות המצטברת שלו היא רציפה. היא לא חייבת להיות מונוטונית עולה בכל נקודה. היא יכולה להיות קבועה בקטעים. פונקציית הצפיפות של משתנה רציף לא חייבת להיות רציפה. מה שחשוב הוא שהאינטגרל רציף.

אם משתנה מקבל ערך מסוים בהסתברות חיובית, אז הוא אינו משתנה רציף. לכן, אין לתת כדוגמא, משתנה מקרי שפונקציית ההסתברות המצטברת שלו קופצת בנקודה מסוימת.

לא מדובר על כך שהצפיפות בשתי הנקודות שווה. מדובר על כך שפונקציית ההסתברות המצטברת שווה בשתי הנקודות. סקירה של הקורה במשפחות התפלגויות מסוימות אינה מתאימה. לא כל משתנה מקרי שייך למשפחה מסוימת.

ההסתברות המצטברת בכל מקרה שואפת לאפס כשהערך שואף למינוס אין סוף, והיא בכל מקרה שואפת לאחד כאשר הערך שואף לאין סוף. יש להקפיד על כך כשנותנים דוגמא לפונקציית ההסתברות מצטברת. צפיפות לא יכולה להיות שווה לקבוע חיובי מסוים בתחום אין סופי.

סעיף ב'

כל ערך שלילי הוא מתאים כאן.

למשתנה נורמלי יש פונקציית צפיפות חיובית בכל נקודה על הישר. לכן פונקציית ההסתברות המצטברת שלו היא מונוטונית עולה. מכאן, כל ערך שלילי הוא מתאים. למשל ההסתברות לקבל ערך קטן או שווה ממינוס שתיים קטנה מההסתברות לקבל ערך קטן או שווה ממינוס אחד.

הערה

לא מדובר על כך שפונקציית הצפיפות בנקודה מסוימת קטנה מפונקציית הצפיפות בנקודה אחרת. מדובר על כך שפונקציית ההסתברות המצטברת בנקודה מסוימת קטנה מההסתברות בנקודה אחרת. חייבים לציין שערך שלילי מתאים למקרה. רק ערך שלילי יכול לענות לשאלה.

שאלה 5

לגבי משתנה $X \sim G(p)$ מתקיים $P(X > 100) = (1 - p)^{100}$. אם נשאיף את p לאפס, אז ההסתברות זו תשאף לאחד. למשל $p = 0.001$ הוא מתאים כאן.

הערה

ההסתברות שהמשתנה מקבל ערך של בדיוק מאה, לא יכולה להיות גדולה מחצי. אבל, כאן מדובר בהסתברות שהוא מקבל ערך של לפחות מאה.
