

## פתרון למבחן מ 14.09.26

### שאלה 1 סעיף א'

כל משתנה הוא קטן מחמש בסיכוי  $\frac{4}{100}$ . תוחלת סכום האינדיקטורים שמצביעים על ערכים קטנים מחמש היא  $99 \cdot \frac{4}{100}$ .

#### הערות

מספר הפעמים מתפלג  $HG(99; 4,96)$  לכן לפי נוסחא התוחלת היא  $99 \cdot \frac{4}{4+96}$ . המשתנים הם תלויים. אם אחד מהם מקבל ערך מסוים, אז אחר לא יכול לקבל את אותו ערך. אבל מראש יש להם את אותה התפלגות. בוחרים 99 מספרים מתוך מאה מספרים. זאת אומרת שמספר אחד לא נבחר. למעשה נבחרים שלושה או ארבעה מהמספרים הקטנים מחמש. בסיכוי  $\frac{4}{100}$  נבחרים שלושה מהמספרים האלה, ובסיכוי  $\frac{96}{100}$  נבחרים כל הארבעה. לכן התוחלת היא  $4 \cdot \frac{96}{100} + 3 \cdot \frac{4}{100}$ .

### שאלה 1 סעיף ב'

הסכום של שני משתנים שווה לשלוש רק אם אחד מהם שווה לאחד והאחר שווה לשניים. זה יכול לקרות לכל היותר פעם אחת (כי בוחרים ללא החזרה). הסיכוי שזה יקרה במקום

$$\text{מסוים הוא } \frac{\binom{2}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2. \text{ הסיכוי שזה יקרה באיזשהו מקום הוא } \frac{98}{\binom{100}{2}}. \text{ מכיון}$$

שהמשתנה שמודד את מספר הפעמים הוא אינדיקטור אז השונות שלו שווה ל

$$\frac{98}{\binom{100}{2}} \cdot \left(1 - \frac{98}{\binom{100}{2}}\right)$$

#### פתרון בדרך שניה

מדובר על שונות הסכום של 98 אינדיקטורים. שונות הסכום שווה לסכום השונות של האינדיקטורים ועוד פעמיים סכום השונות המשותפות של האינדיקטורים.

$$\text{השונות של כל אחד מ } 98 \text{ האינדיקטור היא } \frac{1}{\binom{100}{2}} \left(1 - \frac{1}{\binom{100}{2}}\right)$$

לא יכולים להיות רצפים ביותר ממקום אחד. לכן המכפלה של כל שני אינדיקטורים שווה תמיד לאפס, ותוחלת המכפלה היא אפס. השונות המשותפת של כל שני אינדיקטורים היא

$$0 - \frac{1}{\binom{100}{2}} \cdot \frac{1}{\binom{100}{2}} \cdot 2 \cdot \binom{98}{2} \cdot \frac{1}{\binom{100}{2}} \cdot \frac{1}{\binom{100}{2}} \cdot \frac{98}{\binom{100}{2}} \left(1 - \frac{1}{\binom{100}{2}}\right)$$

זהו סכום השונות של האינדיקטורים ועוד סכום השונות המשותפות.

### שאלה 1 סעיף ג'

$$\text{הסיכוי הוא } \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

הסבר: בהינתן כל בחירה של שלושה מספרים למקומות אלה, הם מסודרים בסדר זה בסיכוי  $\frac{1}{3!}$ .

הסבר נוסף: מספר הבחירות של מספרים למקומות אלה הוא  $100 \cdot 99 \cdot 98$ . במאורע צריך רק לבחור שלושה מספרים שונים למקומות אלה. הסידור שלהם כבר מוכתב. חישוב

$$\text{ההסתברות במרחב מדגם סימטרי נותן } \frac{\binom{100}{3}}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{1}{6}$$

### הערה

המאורעות  $(X_1 < X_2)$  ו  $(X_2 < X_3)$  הם תלויים, ולכן לחיתוך שלהם אין הסתברות ששווה למכפלת ההסתברויות שלהם.

### שאלה 1 סעיף ד'

יהי  $W$  משתנה המייצג את מספר העצים. מתקיים  $E(W|X_1) = 0.5X_1$ . לפי עקרון התוחלת השלמה מתקיים  $E(W) = E(0.5X_1) = 0.5 \frac{1+100}{2}$ .

### שאלה 1 סעיף ה'

כל זוג של גורם שתיים וגורם חמש יוצרים אפס אחד. בבחירת 99 מספרים ללא החזרה יש תמיד יותר גורמי שתיים מגורמי חמש. לכן מספר האפסים שווה למספר גורמי החמש. בסך הכל במאה הטבעיים יש 24 גורמי חמש (עשרים כפולות של חמש שמתוכם ארבעה מספרים מתחלקים פעמיים בחמש). כאן אנו מוותרים במכפלה על מספר טבעי אחד. בסיכוי  $\frac{80}{100}$  אין לו גורם חמש. בסיכוי  $\frac{4}{100}$  יש לו שני גורמי חמש. בסיכוי של  $\frac{16}{199}$  יש לו גורם חמש אחד. לכן מתקיים  $P(M=23) = \frac{16}{100}$ ,  $P(M=22) = \frac{4}{100}$ ,  $P(M=24) = \frac{80}{100}$ .

---

### שאלה 2 סעיף א'

כדי שהסכום יהיה שווה לאפס, צריכים שני המשתנים לקבל ערך של אפס. למשתנה  $Y$  יש הסתברות נמוכה יותר לקבל את הערך אפס. אי אפשר לקבל סכום אפס מבלי ש  $Y$  יקבל את הערך אפס. נבנה התפלגות משותפת של שני המשתנים, כך שבכל מקרה ש  $Y$  שווה לאפס, גם  $X$  יהיה שווה לאפס. כך  $Y$  וגם הסכום יהיו שווים לאפס בסיכוי  $e^{-2}$ .

### שאלה 2 סעיף ב'

המשתנה  $2X$  מקבל רק ערכים זוגיים. לכן הוא לא שווה התפלגות לאף משתנה פואסוני (כל משתנה פואסוני יכול לקבל כל ערך שלם אי שלילי).

### הערות

למדנו שסכום של משתנים פואסונים ב"ת מתפלג פואסוני עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים. אבל המשתנה  $X$  אינו ב"ת בעצמו. כל משתנה שאינו מנוון הוא תלוי בעצמו. אם העתק אחד שלו מקבל ערך מסוים, אז ההעתק האחר גם חייב לקבל את אותו ערך. לפעמים תנאי אחד לתכונה לא מתקיים, אבל בכל זאת התכונה מתקיימת. לכן לא מספיק לטעון שלא מתקיים תנאי האי תלות.

---

### שאלה 3

המשתנה  $X - 2$  מתפלג  $U(0,2)$ . שלו צפיפות של חצי בקטע שבין אפס לשתיים.

$$\int_0^2 0.5X^8 dx = \frac{2^9}{18}$$

לכן התוחלת המבוקשת שווה ל  $\frac{2^9}{18}$ .

$$\int_0^2 0.5(2-x)^8 dx$$

פתרון אחר הוא

---

#### שאלה 4 סעיף א'

הם לא שווים.

$$V\left(\frac{X}{100}\right) = \frac{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{100^2} = \frac{1}{400}$$

$$V\left(\frac{Y}{1000}\right) = \frac{1000 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{1000^2} = \frac{1}{4000}$$

#### הערות

ככל שמספר המשתנים הב"ת ושווי התפלגות רב יותר, כן הממוצע מרוכז יותר סביב התוחלת.

למדנו שלגבי כל משתנה וכל קבוע  $c$  מתקיים  $V(cX) = c^2 V(X)$ .

#### שאלה 4 סעיף ב'

ככל שמספר המשתנים הב"ת ושווי התפלגות רב יותר, כן קטן הסיכוי שהממוצע יסטה סטיות גדולות מהתוחלת.

$$P(X > 60) \cong 1 - \phi\left(\frac{\frac{60}{100} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{100}}}\right) = 1 - \phi(2)$$

$$P(Y > 600) \cong 1 - \phi\left(\frac{\frac{600}{1000} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{1000}}}\right) = 1 - \phi(2 \cdot \sqrt{10})$$

#### הערות

עברנו מהתפלגויות של סכומים להתפלגויות של ממוצעים.  
לא מספיק להראות שזוג ערכים מסויים לא מתקבל בסיכוי שווה.  
אין הצדקה להשתמש כאן בקירוב פואסוני.

---

#### שאלה 5 סעיף א'

המשתנה  $2X$  מקבל רק ערכים טבעיים זוגיים.

עבור כל ערך  $t$  טבעי זוגי מתקיים  $P(2X = t) = P(X = 0.5t) = 0.3 \cdot 0.7^{0.5t-1}$

#### שאלה 5 סעיף ב'

המשתנה  $2Y$  מקבל ערכים בין אפס לשתיים.

עבור כל ערך  $w$  שבין אפס לשתיים מתקיים  $P(2Y \leq w) = P(Y \leq 0.5w) = 0.5w$

לכן למשתנה  $2Y$  יש פונקציית הסתברות מצטברת של משתנה  $U(0,2)$  והוא מתפלג אחיד רציף בין אפס לשתיים.

---

שלומי