

פתרון למבחן מ 14.10.24

שאלה 1

סעיף א'

יש $\binom{10}{2} = 45$ זוגות של אנשים. הודות לאי תלות, ההסתברות היא 0.5^{45} .

סעיף ב'

צריך לבחור לשלושה את הודל, את בייל ועוד אדם אחד. לכל קבוצה של שלושה אנשים יש אותו סיכוי להוות את המשולש.

הסיכוי הוא $\frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}$.

הוא גם שווה ל $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$ (הסיכוי שהודל במשולש כפול הסיכוי בייל במשולש בהינתן שהודל במשולש).

סעיף ג'

לא.

יש סימטריה בין הודל לבייל, אבל יתכן גם שיוויון במספרי המכרים שלהם. ההסתברות שלהודל יש יותר מאשר לבייל שווה להסתברות שלבייל יש יותר מאשר להודל. אבל יש גם הסתברות חיובית לשיוויון.

סעיף ד'

כל קבוצה של שלושה אנשים היא משולש בסיכוי $0.5^3 = \frac{1}{8}$.

כל קבוצה של שלושה אנשים היא אינדיקטור. יש $\binom{10}{3}$ אינדיקטורים.

תוחלת הסכום היא $\frac{1}{8} \cdot \binom{10}{3}$.

הערה

מספר המשולשים לא מתפלג בינומית. יש תלות בין קבוצות של שלושה אנשים שיש בהן זוג משותף. יש אי תלות בין קבוצות שונות של שני אנשים. אין אי תלות בין קבוצות שונות של שלושה אנשים.

שאלה 2

סעיף א'

המשתנה Y מקבל ערכים בין אפס לשתיים. פונקציית ההסתברות המצטברת שלו היא אפס משמאל לאפס והיא אחת מימין לשתיים.

עבור $0 \leq y \leq 2$ מתקיים $P(Y \leq y) = P(2 - y \leq X \leq 2 + y) = \frac{2+y-(2-y)}{4-0} = \frac{y}{2}$

לכן ההתפלגות היא אחידה רציפה בין אפס לשתיים.

סעיף ב'

מתקיים $P(B, A) = P(2 < X < 3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B)P(A)$

לכן, יש אי תלות.

(התפלגות המרחק מהנקודה שתיים, לא מושפעת כאן מכך שמתקבל מיקום גדול או קטן משתיים).

שאלה 3

סעיף א'

סכום מצטבר של שלוש יכול להתקבל בהטלה הראשונה או בשתי ההטלות הראשונות או בשלושת ההטלות הראשונות.
או שמקבלים בהטלה הראשונה תוצאת שלוש או שבשתי ההטלות הראשונות מקבלים פעם אחת אחת ופעם אחת שתיים או שבכל שלושת ההטלות הראשונות מקבלים תוצאת אחת. ההסתברות היא $\frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

סעיף ב'

זה יקרה אם במאה ההטלות הראשונות לא נקבל אף תוצאת שש או שנקבל תוצאת שש אחת.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{100} + \binom{100}{1} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{99}$$

סעיף ג'

דרך ראשונה

נבצע הטלה אחת ולאחריה בסיכוי שליש מספר הטלות שמתפלג $G\left(\frac{2}{3}\right)$ או בסיכוי שני שליש מספר הטלות שמתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$ התוחלת היא $1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2/3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1/3}$.

דרך שנייה

יהי X - ההטלה שבה נקבל לראשונה כפולה של 3.
יהי Y - ההטלה שבה נקבל לראשונה תוצאה שאינה כפולה של שלוש.
אנו מחפשים את תוחלת המכסימלי שביניהם.
הסכום של שני המשתנים X, Y שווה לסכום של המינימלי שביניהם והמכסימלי שביניהם.
(בכל מקרה אחד מהם הוא המינימלי והאחר הוא המכסימלי).
כאן המינימלי הוא תמיד אחד (בהכרח בהטלה הראשונה מקבלים את אחד משני הסוגים).
לכן תוחלת המכסימלי שווה ל $1 = \frac{1}{1/3} + \frac{1}{2/3} - E(X) + E(Y) - 1$.

הערה

התוחלת לא שווה ל 4.5 שזה סכום התוחלות של שני משתנים גיאומטריים בעלי פרמטרים שליש ושני שליש. הסיבה לכך היא שההטלה הראשונה משותפת לזמני הצפייה לקבלת מספר שהוא כפולה של שלוש ולקבלת מספר שאינו כפולה של שלוש.

סעיף ד'

היא שווה לאחד ועוד תוחלת של משתנה $Bin(4, 0.5)$. לכן היא שווה ל $1 + 4 \cdot 0.5 = 3$.

הערות

הקבוע אחד נובע מההטלה הראשונה שאנו יודעים שבה התקבלה תוצאה זוגית. המשתנה הבינומי מייצג את מספר התוצאות הזוגיות בארבע ההטלות הבאות.
ההתפלגות המותנה אינה בינמית. אפשר לאות זאת למשל לפי זה שמשתנה בינומי מקבל את הערך אפס בהסתברות חיובית. לעומת זאת אם בהטלה הראשונה התקבלה תוצאה זוגית, אז כבר לא יתכן שיהיו אפס תוצאות זוגיות.

שאלה 4

המשתנים $2X$ ו Y הם ב"ת ולכן בלתי מתואמים.

$$V(2X + Y) = V(2X) + V(Y) = 2^2 V(X) + V(Y) = 5 \cdot \frac{(6-1+1)^2 - 1}{12}$$