

פתרון למבחן מ 15.09.24

שאלה 1

סעיף א'

תוחלת סכום תמיד שווה לסכום התוחלות. התוחלת של כל אחד משני המשתנים האינדיים היא $3.5 = \frac{1+6}{2}$. לכן תוחלת הסכום היא שבע.

הערות

אי אפשר לחשב את התוחלת לפי התפלגות הסכום. בסעיף זה לא ידוע אם המשתנים הם ב"ת. התפלגות הסכום לא ידועה.
יכולים להיות סוגים שונים של התפלגויות משותפות. פתרון שמחשב תוחלת סכום עבור התפלגות משותפת מסוימת אינו טוב.

סעיף ב'

שני המשתנים מקבלים ערך שווה בסיכוי ששית.
(6 צירופים מבין 6^2 צירופים או לפי זה שהשני מחקה את הראשון בסיכוי ששית).
השני גדול מהראשון באותו סיכוי כמו שהראשון גדול מהשני, לכן סיכוי זה הוא $\frac{5}{12} = \frac{1-\frac{1}{6}}{2}$.
(הסיכוי שהם לא שווים חלקי שתיים).
הסבר אחר הוא שדרוש ששני המספרים יהיו שונים ושעל כל בחירה של שני מספרים שונים יש בחירה יחידה שבה השני גדול מהראשון. לכן הסיכוי הוא $\frac{5}{12} = \frac{\binom{6}{2}}{6 \cdot 6}$.

הערה

לפי חישוב הסתברות שלמה הסיכוי שווה גם ל $\sum_{k=1}^6 P(X=k)P(Y>k)$ שנותן
 $\frac{5}{12} = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$.

סעיף ג'

בסיכוי ארבע ששיות המכסימום הוא ארבע. בסיכוי ששית המכסימום הוא חמש ובסיכוי ששית המכסימום הוא שש.
(רק אם Y מקבל ערך של חמש או שש, אז המכסימום נקבע על פיו).

הערה

גם התפלגות מותנה היא התפלגות, לכן בהתפלגות מותנה סכום ההסתברויות של הערכים השונים חייב להיות שווה לאחד.

סעיף ד'

התשובה היא ששית.
דרוש שהמשתנה X יקבל ערך שש (אחרת הסכום לא יכול להיות 12). לכן הסיכוי לא יכול להיות גדול מששית.
אם נגדיר את זוג המשתנים להיות זהים (תמיד שווים), אז בכל מקרה שבו הראשון מקבל ערך שש, הסכום יהיה שתיים עשרה.

הערות

הכרחי שבדוגמא להתפלגות משותפת, ההתפלגויות השוליות של המשתנים X, Y יהיו אחידות. כל אחד משני משתנים אלה, לא יכול לקבל ערך מסוים נתון בסיכוי גדול מששית. בדוגמא שנתנו יש רק ששה צירופים אפשריים של שני המשתנים שמתקבלים בהסתברות חיובית. בדוגמא שלנו בטבלת ההתפלגות המשותפת, יש ששה איברים ששווים כל אחד לששית. בכל טבלת התפלגות משותפת שנותנים צריכה כל שורה להסתכם באחד, וצריכה כל עמודה להסתכם באחד.

שאלה 2

סעיף א'

סכום של משתנים פואסונים ב"ת מתפלג פואסונית עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים.

$$\text{לכן מתקיים } Z \sim P(100), \text{ ומתקיים } P(Z = 80) = e^{-100} \frac{100^{80}}{80!}$$

הערות

כאן נדרש ביטוי מדויק.

הוכחנו בתרגיל שסכום של שני משתנים פואסונים ב"ת מתפלג פואסונית עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים של המשתנים שסוכמים. מזה נוכל לקבל באינדוקציה שבאופן כללי סכום של משתנים פואסונים ב"ת מתפלג פואסונית עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים.

סעיף ב'

הסכום של המשתנים קטן או שווה ל 110 אם"ם הממוצע שלהם קטן או שווה ל 1.1 . התוחלת של משתנה $P(1)$ היא 1 והשונות שלו היא 1. המשתנים בסדרה הם ב"ת.

$$\text{ההסתברות שווה בקירוב ל } \phi(1) \cong 0.8413 \text{ , } \phi\left(\frac{1.1-1}{\sqrt{\frac{1}{100}}}\right)$$

הערות

למדנו על הקירוב להתפלגות הממוצע. כשפתרנו שאלות על הסכום, עברנו לממוצע. יש להזכיר את כך שהמשתנים הם שווי התפלגות, בלתי תויים ובעלי שונות מסוימת סופית. תנאים אלה נותנים הצדקה לשימוש במשפט הגבול המרכזי. מדובר בהסתברות לקבל ערך קטן או שווה מערך שהוא גדול מהתוחלת. לכן לא סביר שההסתברות תהיה קטנה מחצי.

סעיף ג'

משתנה פואסוני מקבל רק ערכים שלמים אי שליליים. לכן כל אחד מהמשתנים מקבל ערך קטן מ 0.6 אם"ם הוא מקבל את הערך אפס. כל אחד מהמשתנים מקבל את הערך אפס בסיכוי e^{-1} באופן ב"ת באחרים. ההתפלגות היא $Bin(100, e^{-1})$.

שאלה 3

$$\begin{aligned} F_Y(2) &= P(Y \leq 2) = P(X^2 \leq 2) = P(-1 \leq X \leq \sqrt{2}) = \\ &= \frac{\sqrt{2} - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \end{aligned}$$

הערות

חשוב לשים לב שההתפלגות של Y אינה אחידה. פונקציית ההסתברות מצטברת לא יכולה לקבל ערכים קטנים מאפס ולא יכולה לקבל ערכים גדולים מאחד.

שאלה 4

סעיף א'

מתקיים בהכרח $X + Y = 1$ שאומר $Y = 1 - X$. לכן יש קשר לינארי שלילי בין שני המשתנים. לכן מקדם המתאם הוא מינוס אחד.

הערה

כפי שראינו כאן אין צורך לבצע חישוב. אם בכל זאת מבצעים חישוב, אז הוא

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{0 - 0.5 \cdot 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = -1$$

(לפחות אחד משני המשתנים מקבל את הערך אפס, ולכן המכפלה שלהם בכל מקרה שווה לאפס).

סעיף ב'

בהכרח אחד המשתנים X או Y מקבל את הערך אפס. לכן בהכרח מתקיים $X^2Y^3 = 0$. לכן מתקיים $E(X^2Y^3) = 0$ (תוחלת של משתנה מנוון).

הערה

זוג המשתנים הם תלויים וגם מתואמים. תוחלת מכפלה שווה למכפלת התוחלות רק כאשר משתנים הם בלתי מתואמים.

שאלה 5

מספר החלוקות הכללי הוא 3^3 . יש $3!$ חלוקות של הכדורים, כך שלכל תא יכנס כדור אחד.

לכן ההסתברות היא $\frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$.

הערה

בחלוקה של שלושה כדורים שונים לשלושה תאים, יש 3^3 צירופים.

שלומי