

© כל הזכויות שמורות
קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון למבחן מ 15.11.24

שאלה 1 סעיף א'

$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1+10}{2} + \frac{1+10}{2} = 11$$

(המעבר השני מתבסס על כך שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות).

סעיף ב'

$$P(S_2 = 10) = P(X_1 + X_2 = 10) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^9 P(X_1 = k, X_2 = 10 - k) = \frac{8}{10 \cdot 9}$$

סעיף ג'

$$V(S_9) = V\left(\frac{1+10}{2} \cdot 10 - X_{10}\right) = V(X_{10}) = \frac{(10-1+1)^2 - 1}{12}$$

במעבר הראשון השתמשנו בכך שהסכום של תשע הראשונים שווה לסכום כל המספרים פחות האחרון. במעבר השני השתמשנו בנוסחא לחישוב שונות של פונקציה לינארית של משתנה.

סעיף ד'

$$P(S_7 > S_6 + 1) = P(S_6 + X_7 > S_6 + 1) = P(X_7 > 1) = 0.9$$

שאלה 2 סעיף א'

עבור כל k טבעי מתקיים $P(X > k) = q^k$ (דרושים k כשלונות כדי לקבל ערך גדול מ k).

$$P(X > 6 | X > 4) = \frac{P(X > 6, X > 4)}{P(X > 4)} = \frac{P(X > 6)}{P(X > 4)} = \frac{q^6}{q^4} = q^2$$

(דרושים עוד שני כשלונות).

סעיף ב'

זה לא יתכן.

מתקיים $P(X = k) = pq^{k-1}$. פונקצית ההסתברות של משתנה גיאומטרי היא מונוטונית יורדת. לכן ההסתברות לקבלת הערך 5 קטנה מכל אחת מההסתברויות לקבלת ערכים קטנים יותר. לכן היא קטנה מחמישית.

שאלה 3 סעיף א'

$$\begin{aligned} P(1 \leq X^2 \leq 4) &= P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = \\ &= [1 - e^{-2}] - [1 - e^{-1}] = e^{-1} - e^{-2} \end{aligned}$$

סעיף ב'

$$P(1 \leq Y^2 \leq 4) = P(-2 \leq Y \leq -1) + P(1 \leq Y \leq 2)$$

בגלל הסימטריה סביב אפס של פונקציית הצפיפות של משתנה נורמלי סטנדרטי, מתקיים
 $P(-2 \leq Y \leq -1) = P(1 \leq Y \leq 2)$
 הביטוי שווה ל $2 \cdot P(1 \leq Y \leq 2)$ ששווה ל $2[0.9772 - 0.8413] = 2[\phi(2) - \phi(1)]$.

שאלה 4 סעיף א'

		0	1	2		
0		0.5^3	0.5^3	0		0.25
1		0.5^3	$2 \cdot 0.5^3$	0.5^3		0.5
2		0	0.5^3	0.5^3		0.25
		0.25	0.5	0.25		

למשל מתקיים $P(X = 1, Y = 1)$ אם מקבלים "עץ" רק בפעם הראשונה ובפעם השלישית או שמקבלים "עץ" רק בפעם השניה.

סעיף ב'

יהיו Z_1, Z_2, Z_3 אינדיקטורים לקבלת תוצאת "עץ" בהטלות השונות.

$$r(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\text{Cov}(Z_1 + Z_2, Z_2 + Z_3)}{V(X)} = \frac{\text{Cov}(Z_2, Z_2)}{V(X)} =$$

$$= \frac{V(Z_2)}{V(X)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{2 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 0.5$$

הסברים והערות

השונות המשותפת בין משתנים ב"ת שווה לאפס. השונות של אידיקטור בעל הסתברות חצי היא $0.5 \cdot 0.5$. כל אחד מבין X ו Y הוא משתנה בעל התפלגות $\text{Bin}(2, 0.5)$ כמשתנים שווי התפלגות יש ל X ול Y אותה שונות.

ניתן היה לחשב את $\text{Cov}(X, Y)$ גם לפי הנוסחה $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. מתקיים כאן

$$E(XY) = P(X = 1, Y = 1) \cdot 1 \cdot 1 + P(X = 1, Y = 2) \cdot 1 \cdot 2 +$$

$$P(X = 2, Y = 1) \cdot 2 \cdot 1 + P(X = 2, Y = 2) \cdot 2 \cdot 2$$

שאלה 5

כאן הכדורים המיוחדים הם שבעת הכדורים שאינם כחולים.
 ההתפלגות היא $HG(6; 7, 8)$.