

פתרון למבחן מ 26.09.25

שאלה 1

סעיף א'

$$\frac{2}{8} \cdot 1 + \frac{6}{8} \cdot 2 = 1,25$$

הערות

דבר חשוב ביותר הוא שתשובה תהיה סבירה. מכיון שבכל מקרה מספר השכנים של אדם הוא לא גדול משניים, אז התוחלת לא יכולה להיות גדולה משניים.

סעיף ב'

$$\frac{6}{3} = 2$$

כל אדם הוא האמצעי מבין שלושה בסיכוי $\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$. לכל אחד מששת האחרים יש סיכוי של שליש להיות האמצעי בשלושה שמורכבת ממנו, ממי שהיה השמאלי וממי שהיה הימני (לכל אחד מהם יש סיכוי שווה). תוחלת האינדיקטור שאדם מסוים הוא ביניהם היא שליש. תוחלת סכום האינדיקטורים שווה לסכום תוחלתם.

הערות

מספר הנמצאים ביניהם לא יכול להיות גדול מששה. לכן לא סביר לקבל תשובה גדולה משש. בדומה לשאלות שפתרנו, נוח כאן לחשב את התוחלת כסכום תוחלות של אינדיקטורים, ולא לפי התפלגות המשתנה. אבל אם רוצים להסתמך על התפלגות, אז לא כדאי לעבוד עם מרחב מדגם של שמונה עצרת נקודות. נוח להשתמש במרחב מדגם של $\binom{8}{2}$ נקודות שמייצגות את בחירת המקומות של השניים (לא סדור).

סעיף ג'

$$\frac{(8-5)!}{8!} = \frac{3!}{8!} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

באופן כללי יש שמונה עצרת סידורים. אם חמישה יושבים במקומותיהם, אז יש אפשרות רק לסדר את השלושה האחרים בשלושה מקומות. ההסבר השני הוא לפי כלל השרשרת. למשל אם הראשון יושב במקומו, אז סיכוי של השני לשבת במקום שלו הם שביעית.

סעיף ד'

$$\frac{(7-0+1)^2 - 1}{12} = \frac{63}{12}$$

המיקום של אותו אדם מתפלג אחיד בדיד בין אחד לשמונה. לכן מיקום מספר האנשים שמיימינו מתפלג אחיד בדיד בין אפס לשבע.

הערה

מתקבלים ערכים בין אפס לשבע. לכן השונות לא יכולה להיות יותר מידי גדולה.

שאלה 2

סעיף א'

הסיכוי הוא $0.25 = 0.5 \cdot 0.5$. כי כל אחת משתי הספרות האחרות מחזקה בסיכוי חצי, באופן ב"ת באחרת.

סעיף ב'

$$\frac{0.5^3}{1 - 0.5^3} = \frac{1}{7}$$

כאן מתנים במאורע בעל הסתברות גדולה יותר, שהוא שלפחות ספרה אחת נמחקה. המאורע שלפחות ספרה אחת נמחקה, הוא המשלים למאורע ששלושתן לא נמחקו.

סעיף ג'

$$0.5^9 \cdot (1 - 0.25)^{11}$$

בתחום זה יש תשעה מספרים חד סיפרתיים ואחד עשר דו סיפרתיים.

הערה

אף מאורע לא יתרחש איננו המשלים של כל המאורעות יתרחשו.

שאלה 3

$$\begin{aligned} F_Y(4) &= P(Y < 4) = P(X^2 < 4) = P(-2 < X < 2) = \\ &= P(X < 2) = 1 - e^{-2} \end{aligned}$$

שאלה 4

סעיף א'

$$P(6.8 < X_{1000} < 7.1) = P(X_{1000} = 7) = 0.1$$

זו ההסתברות המדויקת.

הערות

שימו לב שמדובר במשתנה אחיד בדיד.

לא ניתן להפעיל את משפט הגבול המרכזי על משתנה בודד.

סעיף ב'

מדובר בסדרת משתנים ב"ת, שווי התפלגות ובעלי שונות סופית. לכן, חל על הסדרה משפט הגבול המרכזי.

התוחלת של משתנה בודד היא $5.5 = \frac{1+10}{2}$.

השונות של משתנה בודד היא $\frac{99}{12} = \frac{(10-1+1)^2-1}{12}$.

ההסתברות שווה בקירוב ל

$$\Phi\left(\frac{7.1 - 5.5}{\sqrt{\frac{99}{12}/1000}}\right) - \Phi\left(\frac{6.8 - 5.5}{\sqrt{\frac{99}{12}/1000}}\right)$$

כל אחד משני המרכיבים שבהפרש קרוב מאוד לאחד. לכן ההפרש קרוב לאפס.
 אבל זהו מאורע בעל הסתברות חיובית שהממוצע יהיה בתחום זה.
 אפילו מאורע חלקי שלו שכל המשתנים יקבלו את הערך שבע, הוא בעל הסתברות חיובית,
 למרות שהיא קטנה ביותר.
 לכן התשובה היא רק מקורבת.

שאלה 5

$$\begin{aligned} V(X^2) &= E((X^2)^2) - E^2(X^2) = E(X^4) - E^2(X^2) = \\ &= \left[\frac{1}{3} \cdot 0^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 2^4 \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 \right)^2 \right] = \\ &= \frac{17}{3} - \frac{25}{9} = \frac{26}{9} \end{aligned}$$

שלומי