

© כל הזכויות שמורות
קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון למבחן לדוגמא

שאלה 1

$$\begin{aligned} P(Z = 9) &= P(X = 3, Y = 6) + P(X = 4, Y = 5) + P(X = 5, Y = 4) \\ &\quad + P(X = 6, Y = 3) = \\ &= P(X = 3)P(Y = 6) + P(X = 4)P(Y = 5) + P(X = 5)P(Y = 4) \\ &\quad + P(X = 6)P(Y = 3) = \frac{4}{36} \\ P(B|Z \geq 10) &= \frac{P(B, Z \geq 10)}{P(Z \geq 10)} = \frac{P(Z = 10)}{P(Z = 10) + P(Z = 11) + P(Z = 12)} = \\ &= \frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}} \end{aligned}$$

ג. הסיכוי הוא חצי. אם תוצאת ההטלה הראשונה היא אי זוגית, אז צריך תוצאה אי זוגית בהטלה השנייה. אם תוצאת ההטלה הראשונה היא זוגית, אז צריך תוצאה זוגית בהטלה השנייה. בכל מקרה הסיכוי הוא חצי.

שאלה 2

א. ההתפלגות היא גיאומטרית עם פרמטר 0.96 . $1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8) = 0.96$.
בכל שלב שעד אליו לא קבלנו הצלחה, הסיכוי לקבלת הצלחה הוא המסלול לכך שבשני המשתנים לא תתקבל הצלחה.

פתרון בדרך שנייה

עבור כל ערך k טבעי מתקיים

$$\begin{aligned} P(Z > k) &= P(X > k, Y > k) = P(X > k)P(Y > k) = 0.2^k \cdot 0.2^k = 0.04^k \\ P(Z = k) &= P(Z > k - 1) - P(Z > k) = 0.04^{k-1} - 0.04^k \\ &= 0.04^{k-1}(1 - 0.04) = 0.96 \cdot 0.04^{k-1} \end{aligned}$$

לכן $Z \sim G(0.96)$.

ב. יכולים להתקבל הערכים 1 או 2 או 3.

$$\begin{aligned} P(Z = 1|X = 3) &= P(Y = 1) = 0.8 \\ P(Z = 2|X = 3) &= P(Y = 2) = 0.2 \cdot 0.8 \\ P(Z = 3|X = 3) &= P(Y \geq 3) = 0.2^2 \end{aligned}$$

כדי שהמינימום יקבל את הערך 3, אסור ל Y לקבל ערך קטן מ 3. כדי שזה יקרה צריך שיהיו שני כשלונות במשתנה Y . אם יש שני כשלונות, אז בכל מקרה מתקבל ערך גדול מ 2.

שאלה 3

$$\begin{aligned} P(1 < |X| < 2) &= P(1 < X \leq 2) + P(-2 < X \leq -1) = \\ &= [P(X \leq 2) - P(X < 1)] + 0 = [(1 - e^{-2 \cdot 2}) - (1 - e^{-2 \cdot 1})] = \\ &= e^{-2} - e^{-4} \end{aligned}$$

הערה: מדובר בהתפלגות רציפה ולכן ההסתברות של נקודות בודדות היא אפס ולכן לא משנה אם מחסירים ממנו או מוסיפים לו נקודת קצה.

שאלה 4

המרחק מקבל רק ערכים שלמים. המאורע שהמרחק גדול מ 99 הוא המאורע שהמרחק גדול או שווה למאה. זהו המאורע שסכום הצעדים קטן או שווה ממינוס מאה או גדול או שווה מאה. זהו המאורע שממוצע אלף הצעדים קטן ממינוס עשירית או גדול או שווה לעשירית. גדלי הצעדים הם ב"ת ושווי התפלגות. לכל צעד יש תוחלת של אפס. השונות של כל צעד שווה לתוחלת הריבוע של הצעד פחות רבוע התוחלת. כל צעד הוא אחד או מינוס אחד. לכן הרבוע תמיד שווה לאחד. רבוע התוחלת היא אפס. לכן השונות של כל צעד היא אחד. אלף הוא מספר גדול מספיק בשביל שימוש במשפט הגבול המרכזי. נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי שעוסק בסדרת משתנים שווי התפלגות, ב"ת ובעלי שונות סופית.

יהי S_{1000} סכום אלף הצעדים הראשונים.

$$P\left(\frac{S_{1000}}{1000} \leq -0.1\right) + P\left(\frac{S_{1000}}{1000} \geq 0.1\right) \cong \left[\phi\left(\frac{-0.1 - 0}{\sqrt{\frac{1}{1000}}}\right)\right] + \left[1 - \phi\left(\frac{0.1 - 0}{\sqrt{\frac{1}{1000}}}\right)\right] \cong$$
$$\cong [\phi(-3.1)] + [1 - \phi(3.1)] = [1 - \phi(3.1)] + [1 - \phi(3.1)]$$

בצעד האחרון השתמשנו בכך שמשנתה נורמלי סטנדרטי הוא סימטרי סביב אפס. הביטוי שקבלנו שווה בקירוב לאפס.

שאלה 5

- א. כדי שההתפלגות תהיה בינומית דרוש שמספר הבנים יהיה שווה ל 1. לא משנה לשם כך מהו מספר הבנות.
- אם יש יותר מבן אחד, אז יש משחקים שבהם משתתפים שני בנים. במשחקים אלה חייב לנצח בן. לכן מספר הנצחונות של בנים לא יכול להיות שווה לאפס, בזמן שכל משתנה בינומי יכול לקבל את הערך 0.
- אם יש רק בן אחד אז הוא משתתף בסדרת משחקים שבכל אחד מהם יש לו אותו סיכוי לנצח, ויש אי תלות בין תוצאות משחקיו.
- ב. יש $\binom{5}{2} = 10$ משחקים שבהם בודאי יש בן מנצח.
- יש $5 \cdot 10 = 50$ משחקים שבכל אחד מהם מנצח בן בסיכוי חצי.
- לכן תוחלת מספר הנצחונות של בנים היא $10 + 50 \cdot 0.5 = 35$.

הערה

- השתמשנו בכך שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות גם כאשר המשתנים תלויים.
- ג. אין כאן הנחה של אי תלות בין תוצאות המשחקים. נחלק את $5 \cdot 10 = 50$ המשחקים שבין בנים לבנות לשתי קבוצות של 25 משחקים. בסיכוי חצי הבנים ינצחו את משחקי הקבוצה הראשונה ולא את משחקי הקבוצה השנייה ובסיכוי של חצי הם ינצחו את משחקי הקבוצה השנייה ולא את משחקי הקבוצה הראשונה. כמובן שבמשחקים שבהם משתתפים רק בנים יהיה תמיד בן מנצח. כך בכל מקרה מספר הנצחונות של בנים יהיה שווה ל $10 + 25 = 35$. כך מספר הנצחונות של בנים יהיה משתנה מנוון ולכן השונות שלו תהיה שווה לאפס.